Gaußsche Trapezformel

Eingabe

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \\ -2 & -4 \\ 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot m$$

Grundlage für die Herleitung der Formeln für den Flächeninhalt eines beliebigen n-Ecks ist die Aufteilung von Einzelflächen in Trapeze.
Von den Punkten werden Lote auf die Abszissenachse gefällt. Für jeweils 2 Punkte wird ein Trapez gebildet und deren Fläche berechnet.
Danach erfolgt durch Addition bzw. Subtraktion die Berechnung der Gesamtfläche.

$n := \operatorname{last}\left(M^{\langle 1\rangle}\right) = 5$

$i := 1 \,..\, \operatorname{last}\left(M^{\langle 1\rangle}\right)$

$$A := \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_i \left(M_{i,1} - M_{\operatorname{mod}(i,n)+1,1}\right) \cdot \left(M_{i,2} + M_{\operatorname{mod}(i,n)+1,2}\right)\right)$$

Ausgabe

$A = 39\ m^2$

$$\operatorname{mod}(i,n)+1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M^{\langle \operatorname{last}\left(M^{\langle 1\rangle}\right)+1\rangle} := M^{\langle 1\rangle}$

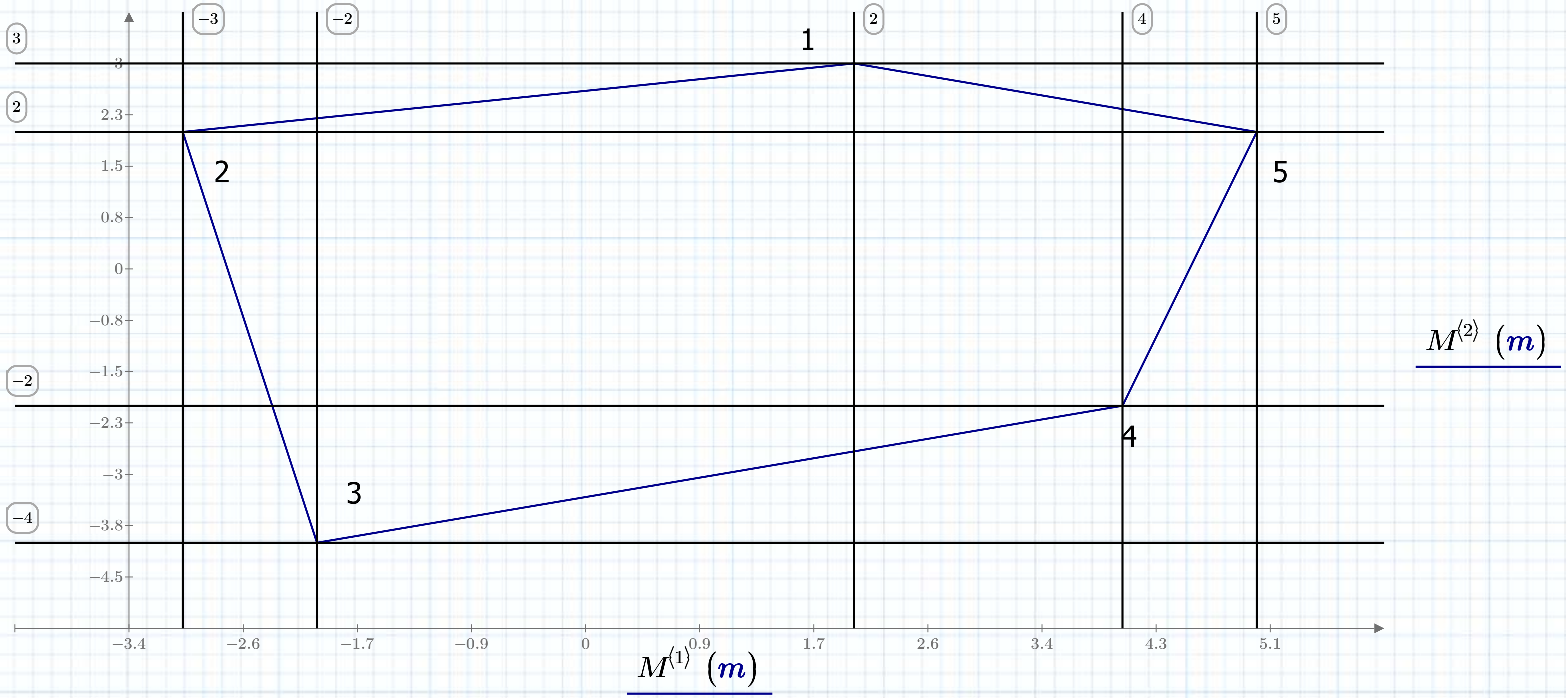
$$L2 := \left\| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1 \,..\, \operatorname{last}\left(M^{\langle 1\rangle}\right) - 1 \\ \quad \left\| L2_j \leftarrow \sqrt{\left(M_{j,1} - M_{j+1,1}\right)^2 + \left(M_{j,2} - M_{j+1,2}\right)^2} \right. \\ L2 \end{array} \right.$$

Ausgabe

$$L2 = \begin{bmatrix} 5.10 \\ 6.08 \\ 6.32 \\ 4.12 \\ 3.16 \end{bmatrix} m$$

Ausgabe

$\sum L2 = 24.792\ m$



$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{bmatrix} := M$$

Bei dieser Methode wird das n- Eck in Dreiecke aufgeteilt. Danach erfolgt die einzelne Flächenberechnung und anschließend die Summenbildung.

$$A1 := \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 \cdot \left(y_2 - y_3\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2\right)\right) \quad A2 := \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 \cdot \left(y_3 - y_4\right) + x_3 \cdot \left(y_4 - y_1\right) + x_4 \cdot \left(y_1 - y_3\right)\right) \quad A3 := \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 \cdot \left(y_4 - y_5\right) + x_4 \cdot \left(y_5 - y_1\right) + x_5 \cdot \left(y_1 - y_4\right)\right)$$

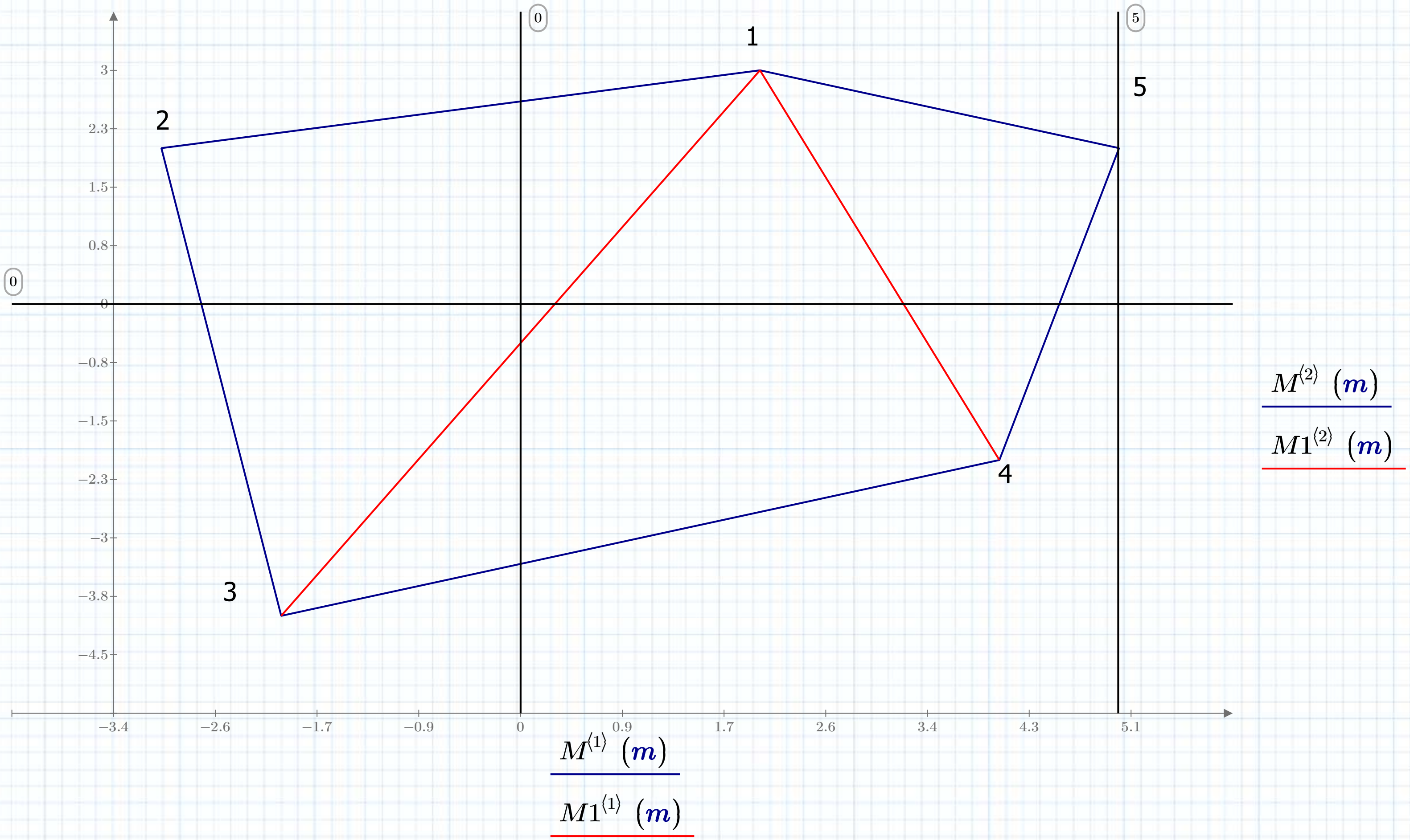
$A1 = 15.5\ m^2$ $\quad A2 = 17\ m^2$ $\quad A3 = 6.5\ m^2$

Ausgabe

$\boxed{A1 + A2 + A3 = 39\ m^2}$

$M1^{\langle 1 \rangle} := M^{\langle 3 \rangle}$ $\quad M1^{\langle 2 \rangle} := M^{\langle 1 \rangle}$ $\quad M1^{\langle 3 \rangle} := M^{\langle 4 \rangle}$

Hilfslinien der Dreiecke



$x := -4\ m, -2\ m..6\ m$

Bei dieser Methode werden für jeweils 2 Punkte im Uhrzeigersinn eine Funktion berechnet. Die Flächenberechnung erfolgt durch Integrale.

$m_{12} := \text{if}\left(x_1 - x_2 = 0, 0, \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$ $m_{23} := \text{if}\left(x_2 - x_3 = 0, 0, \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right)$ $m_{34} := \text{if}\left(x_3 - x_4 = 0, 0, \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}\right)$ $m_{45} := \text{if}\left(x_4 - x_5 = 0, 0, \frac{y_4 - y_5}{x_4 - x_5}\right)$ $m_{51} := \text{if}\left(x_5 - x_1 = 0, 0, \frac{y_5 - y_1}{x_5 - x_1}\right)$

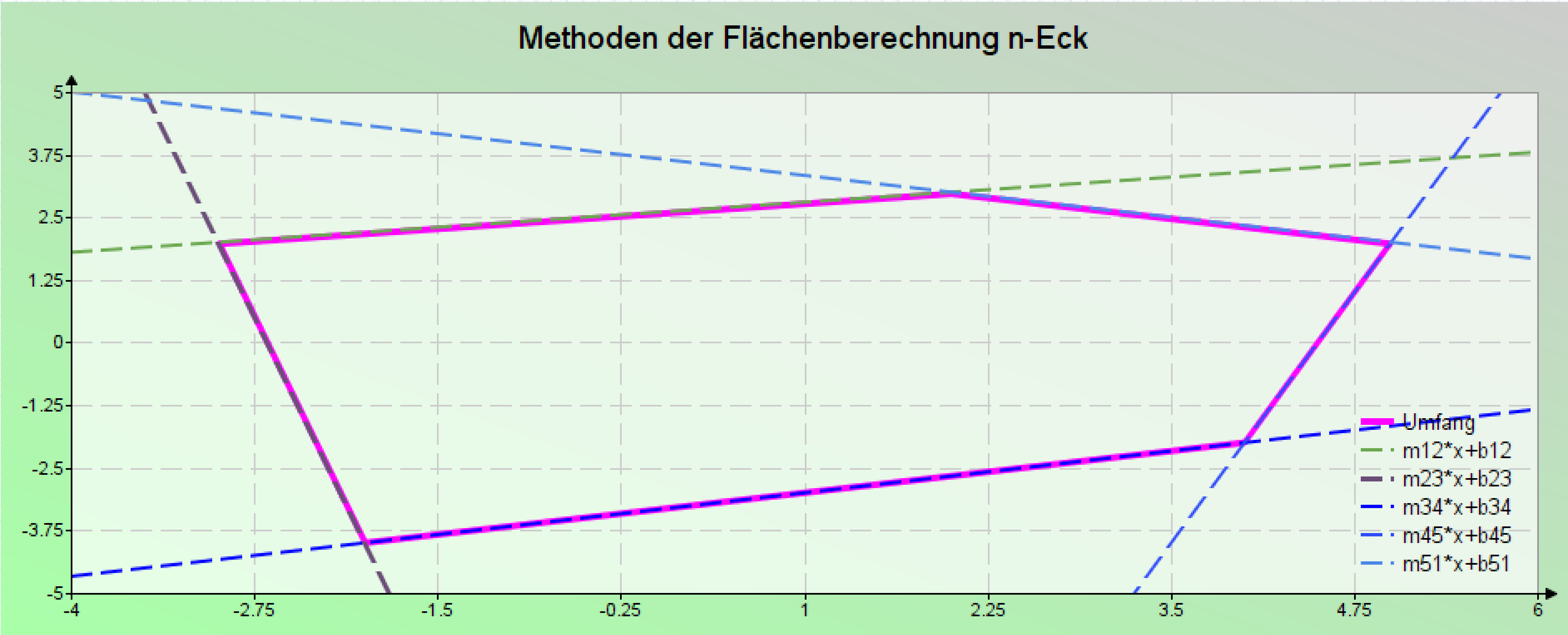
$b_{12} := \text{if}\left(x_2 - x_1 = 0, 0\ m, y_1 - m_{12} \cdot x_1\right)$ $b_{23} := \text{if}\left(x_3 - x_2 = 0, 0\ m, y_2 - m_{23} \cdot x_2\right)$ $b_{34} := \text{if}\left(x_3 - x_4 = 0, 0\ m, y_3 - m_{34} \cdot x_3\right)$ $b_{45} := \text{if}\left(x_4 - x_5 = 0, 0\ m, y_4 - m_{45} \cdot x_4\right)$ $b_{51} := \text{if}\left(x_5 - x_1 = 0, 0\ m, y_5 - m_{51} \cdot x_5\right)$

$A_{12} := -\int_{x_1}^{x_2} \left(m_{12} \cdot x + b_{12}\right) \mathrm{d}x$ $A_{23} := -\int_{x_2}^{x_3} \left(m_{23} \cdot x + b_{23}\right) \mathrm{d}x$ $A_{34} := -\int_{x_3}^{x_4} \left(m_{34} \cdot x + b_{34}\right) \mathrm{d}x$ $A_{45} := -\int_{x_4}^{x_5} \left(m_{45} \cdot x + b_{45}\right) \mathrm{d}x$ $A_{51} := -\int_{x_5}^{x_1} \left(m_{51} \cdot x + b_{51}\right) \mathrm{d}x$

$A_{12} = 12.500\ m^2$ $A_{23} = 1.000\ m^2$ $A_{34} = 18.000\ m^2$ $A_{45} = 0.000\ m^2$ $A_{51} = 7.500\ m^2$

Ausgabe

$A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{45} + A_{51} = 39\ m^2$



Seitenberechnung:

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \\ -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot m \qquad M^{\langle last\left(M^{\langle 1 \rangle}\right)+1\rangle} := M^{\langle 1 \rangle}$$

$$L2 := \left\| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1 \,..\, \text{last}\left(M^{\langle 1 \rangle}\right)-1 \\ \quad \left\| L2^{\langle j \rangle} \leftarrow \sqrt{\left(M_{j,1}-M_{j+1,1}\right)^2+\left(M_{j,2}-M_{j+1,2}\right)^2} \right. \\ L2 \end{array} \right. \qquad L2 = \begin{bmatrix} 5.10 \\ 6.08 \\ 8.06 \end{bmatrix} m \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} := L2$$

$$s := \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) = 9.622\ m \qquad A1 := \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 15.5\ m^2$$

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot m \qquad M^{\langle last\left(M^{\langle 1 \rangle}\right)+1\rangle} := M^{\langle 1 \rangle}$$

$$L2 := \left\| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1 \,..\, \text{last}\left(M^{\langle 1 \rangle}\right)-1 \\ \quad \left\| L2^{\langle j \rangle} \leftarrow \sqrt{\left(M_{j,1}-M_{j+1,1}\right)^2+\left(M_{j,2}-M_{j+1,2}\right)^2} \right. \\ L2 \end{array} \right. \qquad L2 = \begin{bmatrix} 8.06 \\ 6.32 \\ 5.39 \end{bmatrix} m \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} := L2$$

$$s := \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) = 9.886\ m \qquad A2 := \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 17.00\ m^2$$

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot m \qquad M^{\langle last\left(M^{\langle 1 \rangle}\right)+1\rangle} := M^{\langle 1 \rangle}$$

$$L2 := \left\| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1 \,..\, \text{last}\left(M^{\langle 1 \rangle}\right)-1 \\ \quad \left\| L2^{\langle j \rangle} \leftarrow \sqrt{\left(M_{j,1}-M_{j+1,1}\right)^2+\left(M_{j,2}-M_{j+1,2}\right)^2} \right. \\ L2 \end{array} \right. \qquad L2 = \begin{bmatrix} 5.39 \\ 4.12 \\ 3.16 \end{bmatrix} m \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} := L2$$

$$s := \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) = 6.335\ m \qquad A3 := \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 6.50\ m^2$$

Ausgabe

$$A1 + A2 + A3 = 39\ m^2$$